

论经济学公理化的优越性和局限性

单 东

(浙江财经学院浙江省民营经济研究所, 浙江 杭州 310012)

摘 要: 从上世纪 20 年代初开始, 逐步增多的经济理论问题已经成为公理化分析的对象。公理化作为经济分析的标准形式被广泛采用。经济理论的公理化有很多明显的优越性。但由于客观经济现象的复杂性和我们对社会主义市场经济运行机制还缺乏足够的了解, 因而我们对建立在公理化基础上的经济理论认识还停留在初步阶段, 常常表现出一定的局限性。即便如此, 公理化在经济理论中应用的作用也仍然不能低估, 它对我们理解经济现象本质有很大帮助。

关键词: 公理化; 优越性; 局限性

中图分类号: F062.6

文献标识码: A

文章编号: 1004-4892 (2002)02-0012-05

公理化最先在近代数学的发展中得到应用, 并对各门现代数学都有极其深刻的影响。现在, 这种影响已不限于数学领域, 公理化在自然科学领域和社会科学领域都起着或大或小的作用。像西方经济学就在公理化方面迈出了较为成功的一步, 本文拟对此作一论述和分析。

—

所谓公理化, 就是从尽可能少的没有定义的原始概念或基本概念和一组不证自明的命题或基本公理出发, 利用纯逻辑推理法则, 把一门学科建立成为演绎系统的一种方法。基本概念是无需定义的, 更没有必要用更原始更简单的概念去界定, 只须是对学科客体的高度纯化的抽象。公理是对诸基本概念相互关系的规定, 其选取和设置应该符合这样三个条件: 一是要有协调性和相容性, 即在公理系统内不容许几个公理能够同时证明或否定作为原则或规律的命题。二是要有独立性, 即公理的数目要减少到最低限度, 不容许出现多余的不必要的公理。三是要有完备性, 即要确保从公理系统中能够导出论述中涉及的所有命题。一般说来, 对一个较复杂的公理系统来说, 要逐一验证这三条要求并不是轻而易举的, 特别是将公理化应用于经济学时更是这样。在这方面, 美国经济学家奇德布鲁 (Gerard Debreu) 做了很好的基础性工作, 其代表作《价值论》是运用公理化分析经济理论的典范。

关于公理化分析, 这就是指从选择原始概念开始, 形成有关假设, 再运用与任何对原始概念的主观解释毫无关系的数学推理工具, 从那些假设中推出结论, 从而提高分析问题的准确性。那么, 在经济学中如何应用公理化呢?

首先, 选择经济分析的原始概念, 然后用数学客体去代表每一个原始概念。如在德布鲁的《价值论》一书中, 原始概念有商品空间、价格系统, 用个体偏好、个体初始持有和利润分配比例描述

收稿日期: 2001-12-07

作者简介: 单东 (1944), 男, 上海人, 教授。

的消费单位，以及由可行性生产集约描述的生产单位。商品空间的数学表示是线性空间，价格系统的表示是商品空间中的线性函数，偏好的表示是二元关系，等等。在给出了这些原始概念的数学表示后，一些导出概念如供给、需求、可达状态和均衡等，也都可以用数学来表示。

其次，要明确在这些代表着原始概念的客体上的假设，然后由这些假设出发，通过数学分析得出结果，并以定理形式给出。例如，均衡价格即一种商品的需求价格和供给价格相一致时价格的存在定理，可以从商品空间是有限维实向量空间给出的许多生产和消费单位以及偏好是连续的、凸的等假设中导出。

这里，且以经典的阿罗-德布鲁 (Arrow - Debreu) 一般经济均衡存在定理为例作一论述。

先要引入一些基本概念。设所论经济包含 l 种商品， m 个消费者和 n 个生产者。 l 种商品的量可以用 l 维线性空间 R^l 中的点 $X = (x^1, x^2, \dots, x^l) \in R^l$ 表示。 R^l 为商品空间，而 $X \in R^l$ 则为商品向量或商品丛。这其中有以下几个方面的数学抽象：

一是所说的商品可以是实物，也可以是劳务和实物的使用。

二是为了数学处理上的方便，减少误差，假定每种商品都可以用实数来量度。

三是商品的符号可正可负，对于生产者来说，负值代表生产中的投入消耗，正值代表生产中的产出成品；对于消费者来说，正消费是一种消耗，负消费是一种生产，如出卖劳动力。

接着要引入价格空间的概念。价格空间也是 l 维线性空间，它实际上是商品空间 R^l 的对偶空间，但为了表达上的方便，我们把 R^l 看作是“自对偶”的即价格空间也是 R^l ，价格向量 $P = (p^1, p^2, \dots, p^l) \in R^l$ 表示第 h 种商品的价格为 p^h ($h = 1, 2, \dots, l$)。价格的符号亦可正可负。价格符号为正的商品是稀缺商品，价格符号为零的商品是自由商品，例如空气；价格符号为负的商品是有害商品，例如污染物。对于产品向量， $X = (x^1, x^2, \dots, x^l) \in R^l$ 来说，在价格体系为 P 时， X 的总价格就是

$$\langle p, x \rangle = \sum_{h=1}^l p^h x^h$$

这里， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 R^l 中的内积。当 x 是生产活动时， $\langle p, x \rangle$ 代表生产得到的利润。

然后，考虑 m 个消费者。每个消费者可能有的消费活动的全体，即为消费集，是商品空间 R^l 中的一个子集。设第 i 个消费者的消费集为 $X_i \subset R^l$, $i = 1, 2, \dots, m$ 。这些集是非空的，且应该满足一定的合理的假定。第 i 个消费者的行为准则由定义在 X_i 上的偏好 \succsim_i 来决定，这里 \succsim_i 为 X_i 上的一个自反、传递、完全的序关系，它满足

1. $\forall x \in X_i, x \succsim_i x$ (自反性)；
2. $[x \succsim_i y, y \succsim_i z] \Rightarrow [x \succsim_i z]$ (传递性)；
3. $\forall x, y \in X_i, x \succsim_i y$ 或 $y \succsim_i x$ 至少有一个成立 (完全性)。

消费者在其支付能力许可的条件下，选取偏好最优的消费活动。消费者的支付能力由两部分组成：一部分是由其本人拥有的商品的价值；另一部分是生产者分给他的一部分利润。设第 i 个消费者所掌握的商品向量为 $e_i \in R^l$, e_i 即为第 i 个消费者的初始持有， $i = 1, \dots, m$ ；第 j 个生产者分给第 i 个消费者的利润份额为 Q_{ij} ，这里 $Q_{ij} \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$ ，且 $\sum_{i=1}^m Q_{ij} = 1$, $j = 1, \dots, n$ 。这样，如果第 j 个生产者的利润为 r_j ，价格体系为 P ，则第 i 个消费者的总财富为

$$W_i = \langle p, e_i \rangle + \sum_{j=1}^n Q_{ij} r_j, \quad i = 1, \dots, m$$

当第 i 个消费者的消费活动为 $x_i \in X_i$ 时，则 x_i 必须满足

$$\langle p, x_i \rangle \leq W_i = \langle p, e_i \rangle + \sum_{j=1}^n Q_{ij} r_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

这个不等式即为消费者的预算约束。

还有，再考虑 n 个生产者。每个生产者可能有的生产活动的全体，即为生产集，是商品空间 R^l 中的一个子集。设第 j 个生产者的生产集为 $Y_j \subset R^l$, $j=1, 2, \dots, n$ ，它们也将满足非空等的合理的假定。生产者的行为准则是使利润达到最大。在价格体系为 P 时，生产活动 $y \in R^l$ 的利润就是 $\langle p, y \rangle$ 。因此，第 j 个生产者可能得到的最大利润为

$$\max_{y \in Y_j} \langle p, y \rangle$$

至此，我们已经对一个经济体作了全面的刻画，用符号表示，上述的经济可记作

$$E = \{ (X_i, l_i, e_i), (Q_{ij}), (Y_j) \}_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$$

经济体 E 的状态是指给定了一个价格向量 P ，在此价格下，各个消费者都采取了一个消费活动，各个生产者都采取了一个生产活动。用符号表示，即状态

$$S = ((x_i), (y_j), p),$$

其中 $x_i \in X_i, i=1, \dots, m; y_j \in Y_j, j=1, \dots, n, P \in R^l$ ，且

$$\langle p, x_i \rangle + \langle p, e_i \rangle + \sum_{j=1}^n Q_{ij} \langle p, y_j \rangle \leq 0, i=1, \dots, m \quad (2)$$

上式就是利润 π_j 为 $\langle p, y_j \rangle$ 时的预算约束 (1)。当然，除了要考虑财富上的预算约束外，还要考虑供求上的约束，即应该有

$$\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m l_i = 0 \quad (3)$$

满足 (3) 的状态即为可达状态。 X_i 中所有可能在可达状态出现的消费向量的全体 $\mathcal{X}_i \subset X_i$ 即为可达消费集。

满足下列三条件的可达状态 (x_i^*, y_j^*, p^*) 即为经济 E 的均衡：

1. $\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall x \in X_i, [\langle p^*, x \rangle + \langle p^*, l_i \rangle + \sum_{j=1}^n Q_{ij} \langle p^*, y_j^* \rangle] \Rightarrow x \in \mathcal{X}_i^*$
2. $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \langle p^*, y_j^* \rangle = \max_{y \in Y_j} \langle p^*, y \rangle$;
3. $\sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j^* - \sum_{i=1}^m l_i = 0$

这三个条件的含义是显而易见的。(1) 说明 x_i^* 是满足预算约束的最好消费；(2) 说明 y_j^* 是使利润最大化的生产；(3) 说明供给与需求达到平衡。阿罗—德布鲁定理就是指出在一系列合理的假定下，均衡存在的条件。

按照阿罗—德布鲁定理，如果经济 $E = \{ (x_i, l_i, e_i), (Q_{ij}), (Y_j) \}$ 满足下列条件：

1. 对于消费者 $i=1, \dots, m$ ，有
 - (1) X_i 为下有界闭凸集；(2) \mathcal{X}_i 中无满足消费，即 $\forall x \in \mathcal{X}_i, \exists x' \in X_i, x < x'$ ；(3) 集合 $\{ (x, x') \in X_i \times X_i \}$ ；(4) $\forall x, x' \in X_i, \forall \lambda \in (0, 1), [\lambda x + (1-\lambda)x'] \in \mathcal{X}_i$ ；(5) $\exists x_i \in X_i, x_i \ll e_i$ ，即 $x_i^h < e_i^h, h=1, 2, \dots, l$ ；
2. 对于生产者 $j=1, \dots, n$ ，有
 - (1) $0 \in Y_j$ ；(2) $Y = \sum_{j=1}^n Y_j$ 是闭凸集；(3) $Y \cap (-Y) = \{0\}$ ；(4) $Y \supset (-Y)$ ；

那么 E 有均衡状态。

我们对定理中的条件作出如下说明：1. (1) 的下有界性是指负消费（生产或出卖劳力）是有界的；凸性是指两种消费的凸组合，这也是一种消费；闭性是指可以达到的消费的极限；1. (2)

是指消费者的消费欲望是无止境的，使得生产过剩问题不易产生；1. (3) 是说消费者的偏好有一定的连续性；1. (4) 是对偏好的凸性假设；1. (5) 是保证消费者有一定的支付能力，至少可进行略多于 x_i 的消费；2. (1) 是说生产者在条件不利时可以什么也不干，这就保证利润是非负的；2. (2) (3) (4) 是对整个经济的生产能力的刻画；2. (2) 的含义与 1. (1) 类似；2. (3) 说明生产活动是不可逆转的；2. (4) 即为自由处置假设，说明经济 E 有能力把任何不需要的商品都处理掉，该假设对于证明均衡的存在是很重要的。

公理化理论必须经过严格的检验，要在去掉模型的全部经济意义后，检验其纯粹的数学结构仍然能够完全成立，才能说明是成功的。

二

从上世纪 50 年代起，逐步增多的范围广泛的经济理论问题已经成为公理化分析的对象。这是因为，经济理论公理化有很多明显的优越性。

一是经济理论应用公理化使一个经济理论的假设明确化，使人们可以对这个经济理论的适用范围作出比较稳当和准确的判断。而当发现了原始概念的新解释时，公理化还能为新的经济理论问题提供现成的答案。譬如，我们来考虑一下商品概念的发展。传统意义上的商品是指物质属性、交货时间和地点都很具体的一种货物或劳务，而没有考虑到其环境的不确定性。当对传统意义的商品的考察加进交货时可能发生的不确定性情况时，原有模型的形式无需作任何的改变，便能得到关于不确定性的理论。在此理论中，原有确定性理论的全部结论都是有效的。

二是经济理论应用公理化坚持了数学运算的严格性，借以引导经济学家解决仅凭传统的定性方法难以解决的复杂的经济问题，并使其对所研究的问题有更深刻的理解。使用的分析方法的拓宽，显然有益于该学科的发展。由此看来，公理化不仅建立了严格的科学基础，使研究和探讨得以独辟蹊径，而且也使研究人员从必须推敲前人工作的每一细节的积习中解脱出来。

三是经济理论应用公理化的严格性满足了当代许多经济学家追求严格性本身的学术需要，从而使经济学成为一种有效的思维工具的理论标志。当然，一种有效思维工具的理论还有其它两个标志，即简洁性和普遍性。尽管简洁性和普遍性的美学意义足以成为理论设计者的追求目标，但其对于科学的价值远远超出了美学的范畴。简洁性使得经济理论可以被更多的研究人员所运用，而普遍性使得这个经济理论适用于各种经济问题。

四是经济理论应用公理化还以另一种方式帮助了实际经济工作者，使得他们可以运用效率极高的数学语言，用非常省时的方式去交流和思考。一般认为，经济理论总是以大量的论据提供论证以后，才可能给人们提供行动的指针。但是，人们对论据的理解往往存在着各自的偏见，少不了有所争议。因为，论据是通过不同的人观察得到的，而不同的人的生活经历和经济环境肯定有所不同；何况，经济理论还依理论家们的经验、利益和思考方式的不同而各有偏重。因此，实际经济工作者对经济理论的选择就得主要依靠自己的思考和判断，而公有化则有助于这种思考和判断。

五是经济理论应用公理化使经济学家和数学家之间的对话变得更加频繁。像美籍匈牙利人，著名数学家、经济学家约翰·冯·诺伊曼 (John Von Neumann) 以其数理逻辑的卓越贡献闻名于世，却又将其研究的很大一部分贡献给经济问题，这样的事例不是独一无二的。由诺伊曼提出的均衡经济增长模型和主要由他创立的博弈论，对经济学的发展有十分重要影响，使数理经济进入了当代阶段。同样，公理化也使得经济学能够影响数学，并为数学的发展作出贡献，其中最明显的例子有 $KaKn + a_{ni}$ 定理、对应积分法理论、近似定点的计算方法和方程组近似解的方法等。

六是经济理论应用公理化提高了它的预见能力，有助于人们增加对未来的信心。还在 19 世纪

及 20 世纪初, 经济学家相互交流的主要方式一直是以书面文字来表述, 伴以图表作补充。但是, 随着传统的文字交流逐渐被数学使用所代替, 理论家们信心大增, 认为公理化和预测能力是使经济学家比对经济问题有兴趣的一般经济工作者要优越的重要原因。

七是经济理论应用公理化使现实经济关系定量化、逻辑化, 以致人们能够极方便地对经济系统的运行状况进行仿真, 对有关经济政策进行评价和预测, 像计量经济分析、线性规划分析和非线性规划分析、系统动态学仿真等多种分析技术, 都是以公理化的经济理论为基础的。

如今, 公理化已经作为经济分析的标准形式被采用。从一般均衡理论、效用理论和生产理论, 到宏观经济学、工业组织经济学、公共财政学等众多领域, 都在竞相运用公理化。但是, 由于客观经济现象的复杂性, 加之我们对经济系统的运行机制、特别是对我国的社会主义市场经济运行机制还缺乏足够的了解, 因而我们对建立在公理化基础上的经济理论还停留在初步阶段, 常常表现出一定的局限性。这种局限性主要来自如下两个方面:

第一, 我们用以代表原始概念的数学客体不能十分准确地刻画这些概念的基本属性。例如, 用线性空间来代表商品空间, 隐含着商品是无限可分的, 但实际情况并非如此。此外, 模型中还很难容纳所有重要的经济变量, 难免影响结论的准确性。

第二, 我们使用的某些假设纯粹是为了证明上的需要, 实际上是不一定合理的。例如, 在阿罗—德布鲁模型中, 假设总生产集 Y 是凸的, 即规模扩大而收益不一定增加, 这与工业革命的经验——规模扩大收益也增加正好相反。对于其他假设的经济合理性, 有不少也是同样存在问题的。

经济理论的公理化虽然在解释经济现象时存在一些局限性, 遇到了不易克服的困难, 但它在应用中的作用绝不能低估, 它对我们理解经济现象的本质有很大的帮助。经济学家特别是数理经济学家所要做的事情, 就是要引入或创造更合适、更强有力的数学工具, 以使用更恰当的数学客体去代表原始概念, 并对已经作出的假设进行修正和补充, 使其更加符合实际。这样得出的结论, 定能更科学、更确切地揭示经济现象的本质。

参考文献:

- [1] G. Debreu, Value Theory, Wiley, 1959.
- [2] K. J. Arrow, and F. H. Hahn, General Competitive Analysis, 1971.
- [3] G. S. Becker, E. M. Lanes, and R. T. Michael, An Economic Analysis of Marital Instability, 1977.

On the Advantage and Limitation of Economic Axiomatization

SHAN Dong

(Private Enterprise Institute of Economics, Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou 310012, China)

Abstract: Since early 20th of last century, the increasing economic theory problems has become object of axiomatization. Axiomatization has been broadly adopted as a standard format of economic analysis. Axiomatization of economic theory has many obvious advantage. However, our knowledge of economic theory based on the axiomatization is still at initial stage, and limited, because of the complicity of objective economic phenomenon and our lack knowledge on functional mechanism under socialism market economy. Nevertheless, the function of axiomatization can not be under estimation, it does a lot help in understanding the essence of economic phenomenon.

Key words: axiomatization; advantage; limitation

(责任编辑: 倪建平)